Ω展開の一つの証明

AUTHOR(S):

伊藤, 秀美

Ω展開の一つの証明

京大理　伊藤秀美

§1　序

開いた系の性質はその系の確率分布の運動を記述する方程式，具体的にはたとえばマスター方程式なるもので調べることが通常なされる。この方程式自体は昔 van Hove[1]がいわゆる weak coupling limit（系と外界の結合定数 λ，時間 t とした時，スケールした時間 $\tau=\lambda^2 t$ で τ を固定，$\lambda\to 0$ とした極限）で導びいた。最近では Davies, Pulè [2] らがその基礎づけを行なっている。

さてこのマスター方程式が（物理的には系が一様であるという仮定のもとに）特に簡単な形をとるとき，（簡単のため一次元，定常）

$$\frac{\partial}{\partial t}P_\Omega(x,t)=\Omega\int_{-\infty}^{\infty}dr\{w(x-\varepsilon r,r)P_\Omega(x-\varepsilon r,t)-w(x,r)P_\Omega(x,t)\} \tag{1}$$

（Ωは系の大きさをあらわすパラメタ，$\varepsilon=1/\Omega$，xは intensive variable ）

$\Omega\to\infty$の極限で平均値 $y(t)$ に対しては

$$\dot{y}(t)=C_1(y(t)), \tag{2}$$

ゆらぎ$\zeta=\sqrt{\Omega}(x-y(t))$に対しては

$$\frac{\partial}{\partial t}P_\infty(\zeta,t)=\{-\frac{\partial}{\partial\zeta}C_1^{(1)}(y(t))\zeta+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}C_2(y(t))\}P_\infty(\zeta,t) \tag{3}$$

が成り立つ。ここで

$$C_k^{(n)}(y)=\frac{d^n}{dy^n}\int dr\, r^k w(y,r). \tag{4}$$

この事実は最初 van Kampen [3]，後に Kubo et al.[4] が指摘した。

しかしながら両者のニュアンスには少しく違いがあるように思われるのでこのことを，少し脱線して量子力学と古典力学との対応を例に引いて，まず示そう。

量子力学で $\hbar \to 0$ とすると古典力学に移行することは量子力学の教科書に書いてある。通常は波動函数ψに対して

$$\Psi = ae^{is/h}$$

とおいてSchrödinger方程式にぶちこんで，$\hbar$のベキに展開整理してHamilton-Jacobiの式が出て…という具合になっている。これはどちらかというと波動函数自身を大切にする立場である（立場Aと呼ぼう）。さて今一つの立場があって波動函数の形（有限時間後の）はそれほど問題にしないが，オブザーバブルの期待値自身が $\hbar \to 0$ の極限で古典力学の結論に移行することを重んじる立場（立場Bと呼ぶ）である。Bの方が具体的と云えよう。*) Aの方は観測量とむすびつけようとするとSaddle point method 的な考えになり，基礎づけに際してその辺がややあいまいになるうらみがある。Aの基礎づけはたとえばマスロフ[6]に書いてあり，Bについて最初にはっきり述べて証明を与えたのはHepp[7]のようである。

さてここで話をマスター方程式(1)にもどす。hと $\varepsilon = 1/\Omega$ が対応していることは明らかで，量子力学との違いは群か半群かという点にあるのみである。Kubo et al.の立場は $P = e^{\Omega\phi}$ とおくからAの立場であり，この立場に立って基礎づけを試みたのがSuzuki[8]である。一方van KampenやTomitaグループ[9]による応用例では，平均値，分散などをそのままあつかうのでBの立場といえる。そこでこの小論では立場Bからの基礎づけを行うことにする。§2が定理と議論　§3が証明。

なおこの定理の事実はHeppの講義ノート[10]に証明抜きでふれてある（条件の詳細不明）ことをことわっておく。

§2 定理と議論

<定　理>

初期条件として（$y \in R^1$）

$$P_\Omega(x, 0) = \sqrt{\Omega}\,\rho(\sqrt{\Omega}(x-y)) \tag{5}$$

---

*) 因みにSchiffの教科書[5]では「…適当な極限移行によっていかなる計算結果も古典的記述と一致することを要請する。この要請は，Bohrの対応原理を表わしている…」（下線部筆者）

ここで

$$\rho(x) \geq 0 \qquad \int \rho(x)dx = 1 \tag{6}$$

方程式(2)と(3)の解 $y(s)$, $P_\infty(\zeta, s)$ (初期条件 $y(0)=y$, $P_\infty(\zeta, 0)=\rho(\zeta)$ とする。積分核 w についてはある連続函数 $g(r)$ が存在して

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial y^j} w(y, r) \right| \leq g(r) \qquad \int |r|^i g(r) dr < \infty$$
$$0 \leq i \leq 9 \quad , \qquad 0 \leq j \leq 3 \tag{7}$$

を満たすものとする。さらに($0 \leq s \leq t$)

$$\int d\xi \left| \xi^k \frac{\partial^\ell}{\partial \xi^\ell} P_\infty(\xi, s) \right| < \infty \qquad 0 \leq k, \ \ell \leq 3 \tag{8}$$

を仮定する。このとき任意の有界で連続な函数 f に対して

$$\lim_{\Omega\to\infty} \int dx\, P_\Omega(x, t) f(x) = f(y(t)) \tag{9}$$

$$\lim_{\Omega\to\infty} \int dx\, P_\Omega(x, t)\, f(\sqrt{\Omega}(x-y(t))) = \int d\zeta\, P_\infty(\zeta, t) f(\zeta) \tag{10}$$

が成り立つ。

以下少しコメントをつけ加える。

Remark 1. (初期条件(5)について)

$\Omega\to\infty$ で y のまわりに $1/\sqrt{\Omega}$ ぐらいでゆらいだまま δ − 函数的になることを示している。(9)(10)に相当する結論は初期条件の family $\{P_\Omega(x, 0)\}_\Omega$ によりけりで,なんでもかんでも成り立つわけではないし,極限の存在も保証されない。量子力学の場合は脚注に引用した(Schiff の本からの引用)ことからわかる如く対応原理が指導原理となって初期条件の形に強い制限がつく。ところが今の場合は臨界点のまわりの異常ゆらぎ等からわかるごとくそれに対応するものがないということに注意すべきである。

Remark 2. (極限界の存在について)

方程式(2)の解については $C_1(y)$ が連続でリプシッツ条件をみたしていれば,また(3)についてはGauss 型の Fokker-Plank 方程式だから解が explicit に構成できる($C_1^{(1)}$, C_2 が適当になめらかならば)から,局所的な解の存在等はよほど変なのをとってこない限り

大丈夫である。

Remark 3. （条件(8)について）

これは $\rho(x)$ に対する条件と考えられるがたとえば

$$\rho(\mathrm{x}) = (2\pi\sigma)^{-1/2}\exp(-\mathrm{x}^2/2\sigma)$$

ぐらいなら

$$P_\infty(\mathrm{x},\ \mathrm{t}) = (2\pi\sigma(\mathrm{t}))^{-1/2}\exp(-\mathrm{x}^2/2\sigma(\mathrm{t}))$$

となってみたされている。ここで $\sigma(t)$ は

$$\dot{\sigma}(\mathrm{t}) = 2C_1^{(1)}(\mathrm{y}(\mathrm{t}))\sigma(\mathrm{t}) + C_2(\mathrm{y}(\mathrm{t}))$$
$$\sigma(0) = \sigma$$

の解である。

Remark 4. （実例にあてはめた場合）

この定理を実例にあてはめると少しく不都合なことがおきてくる。例えば Scully-Lamb[11] のレーザー理論では $x=n/\Omega$（n；フォトン数），α，β，γ 定数として（＞０）

$$\mathrm{w}(\mathrm{x}, \mathrm{r}) = 0 \qquad (\mathrm{r} \neq \pm 1)$$
$$\mathrm{w}(\mathrm{x}, 1) = (\alpha - \beta\mathrm{x})\mathrm{x} \qquad \mathrm{w}(\mathrm{x}, -1) = \gamma\mathrm{x}$$

となる。（物理的にも）$w \geq 0$ でないといけないから x の変域は

$$0 \leq \mathrm{x} \leq \alpha/\beta$$

であり R^1 全体で定義されていない。この不都合さは $P_\infty(x, t)$ が一般に無限にすそをひくことからも了解できる。このような場合 w の形を適当に仮定して外の方へ接続しておけばよかろう。

Remark 5. （時間に関する一様性）

(9)を例にとろう。左辺と右辺の差は $\Omega\to\infty$ できえるが（ Ω有限でとめると）その差は時間に依存し，時間がたつにつれて差は大きくなる。時間について一様におさえられるのは(2)が（多次元を考える）limit cycle のないような場合に限るだろう。なぜなら

limit cycle のある場合 $\lim_{t\to\infty} f(y(t))$ は存在しないが，$P_\Omega(x,\ t) \to P_\Omega^{st}(x)$なる定常状態に（普通は）近づくから $\lim_{\Omega\to\infty}\lim_{t\to\infty}\int P_\Omega(x,\ t)\,f(x)\,dx$ は極限をもつだろうから。Ω も t も十分大きいが有限の場合このことはよく念頭においておく必要がある。（例えば超放射）

Remark 6. （量子系）

量子系に対しても類似の結果がなり立つ。[12]但し文献 12) では Heisenberg 表示をとっているのでそのままではここの議論と対応しない。(5) で $\Omega\to\infty$としてしまった状態（δー函数みたいなもの）をあらかじめつくっておいて，その上で物理量の運動をおいかけるという方法をとっている。尚立場A に立った時の量子系への拡張は文献 13) 参照のこと。

§3 証　明

まず変数を変換する。

$$\xi = \sqrt{\Omega}\,(\mathrm{x}-\mathrm{y})$$

$$\overline{\mathrm{P}}_\Omega(\xi,\ \mathrm{t}) = \mathrm{P}_\Omega(\mathrm{x},\ \mathrm{t})/\sqrt{\Omega}$$

とおけば (1) は

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,\overline{\mathrm{P}}_\Omega(\xi,\ \mathrm{t})}{\partial\,\mathrm{t}} &= \Omega\int \mathrm{dr}\,\{\mathrm{w}(\mathrm{y}+\sqrt{\varepsilon}\,\xi-\varepsilon\mathrm{r},\ \mathrm{r})\,\overline{\mathrm{P}}_\Omega(\xi-\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{r},\ \mathrm{t}) \\ &\quad - \mathrm{w}(\mathrm{y}+\sqrt{\varepsilon}\,\xi,\ \mathrm{r})\,\overline{\mathrm{P}}_\Omega\,(\xi,\ \mathrm{t}) \\ &\equiv (\Gamma_\Omega(\mathrm{y})\,\overline{\mathrm{P}}_\Omega)(\xi,\ \mathrm{t}) \end{aligned} \tag{11}$$

となり初期条件は，

$$\overline{\mathrm{P}}_\Omega(\xi, 0) = \rho(\xi)$$

となる。次の 2つの補題が必要である。

<補題 1> (Lumer-Phillips)[14]. X を Banach 空間とし A を有界な（XからXへの）線型作用素とする。このとき $\exp(At)$ が縮小半群*) となるための必要十分条件は

*) 縮小とは $\|\exp(At)\cdot x\| \leq \|x\|$ のこと。

$$\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(\|1+At\|-1)\le 0$$

が成り立つことである。

<補題2> $0\le w\le M$, $\int w(x,r)dr\le M$ ならば[*)] (11)式の $\Gamma_\Omega(y)$ は norm の意味で連続な $L^1(R)\to L^1(R^1)$ の縮小半群を生成する。

証　明

$\forall f\in L^1(R^1)$ に対して

$$\|(1+t\Gamma_\Omega)f\|_1\le\int d\xi\,\left|\left[1-t\Omega\int dr\,w(y+\sqrt{\varepsilon}\xi,r)f(\xi)\right|\right.$$

$$+t\Omega\int d\xi\int dr\,|w(y+\sqrt{\varepsilon}\xi-\varepsilon r,r)\,f(\xi-\sqrt{\varepsilon}r)|,$$

ここで $\|g\|_1=\int d\xi\,|g(\xi)|$。$\int w(x,r)dr<M$ に注意すれば $0\le t\le 1/M\Omega$ に対して

$$\|(1+t\Gamma_\Omega)f\|_1\le\int d\xi\,(1-t\Omega\int dr\,w(y+\sqrt{\varepsilon}\xi,r))\,|f(\xi)|$$

$$+t\Omega\int d\xi\int dr\,w(y+\sqrt{\varepsilon}\xi-\varepsilon r,r)\,|f(\xi-\sqrt{\varepsilon}r)|$$

$$=\int d\xi\,(1-t\Omega\int dr\,w(y+\sqrt{\varepsilon}\xi,r))|f(\xi)|$$

$$+t\Omega\int d\xi\int dr\,w(y+\sqrt{\varepsilon}\xi,r)\,|f(\xi)|$$

$$=\int d\xi\,|f(\xi)|=\|f\|_1.$$

この不等式と補題1より補題2は明らか。

定理の証明　(10)式の左辺と右辺をそれぞれA，Bとする。ずれの演算子 T(a) を

$$(T(a)f)(\xi)=f(\xi+a)$$

*) この条件は定理の条件(7)に含まれていることに注意せよ。

で定義する（ f は連続とする）。形式的に書くと $T(a)=\exp(a\frac{\partial}{\partial\xi})$ である。これをつかって

$$A=\int d\xi\ f(\xi)\ \{T(\sqrt{\Omega}(y(t)-y))\,e^{\Gamma_\Omega(y)t}\rho(\xi)\}$$

とかける。演算子

$$W_\Omega(t,s)=T(\sqrt{\Omega}(y(t)-y))\,e^{\Gamma_\Omega(y)(t-s)}T(\sqrt{\Omega}(y-y(s)))$$

を使って

$$B-A=\int d\xi\ f(\xi)\int_0^t ds\frac{d}{ds}\{W_\Omega(t,s)P_\infty(\xi,s)\}$$

となることがわかる。ここで $y(0)=y$ ，$P_\infty(\xi,0)=\rho(\xi)$ を使った。s に関する微分を実行して

$$\frac{d}{ds}\{\ \}=T(\sqrt{\Omega}(y(t)-y))\,e^{\Gamma_\Omega(y)(t-s)}(-\Gamma_\Omega(y)-\sqrt{\Omega}\dot{y}(s)\frac{\partial}{\partial\xi})$$

$$\cdot T(\sqrt{\Omega}(y-y(s)))P_\infty(\xi,s)+W_\Omega(t,s)\frac{\partial}{\partial s}P_\infty(\xi,s)$$

$$=W_\Omega(t,s)\{-\Gamma_\Omega(y(s))-\sqrt{\Omega}\dot{y}(s)\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial s}\}P_\infty(\xi,s)$$

$$\equiv W_\Omega(t,s)QP_\infty(\xi,s)。$$

かくして

$$|B-A|\leq\int d\xi\ |f(\xi)|\int_0^t ds\,|W_\Omega(t,s)QP_\infty(\xi,s)|$$

$$\leq\|f\|_\infty\,t\sup_{0\leq s\leq t}\|W_\Omega(t,s)QP_\infty(s)\|_1$$

を得る。ここで $\|f\|_\infty=\sup_{x\in R}|f(x)|$, $\|f\|_1=\int|f(x)|dx$. 補題2をつかって

$$|B-A|\leq\|f\|_\infty\,t\sup_{0\leq s\leq t}\|QP_\infty(s)\|_1$$

QP_∞ のあらわな形は

$$-QP_\infty(\xi,s)=\Omega\int dr\ w(\sqrt{\varepsilon}\xi+y(s)-\varepsilon r,r)\,P_\infty(\xi-\sqrt{\varepsilon}r,s)$$

$$-\Omega \int dr\, w(\sqrt{\varepsilon}\,\xi + y(s),\ r)\, P_\infty(\xi,\ s)$$

$$+(\sqrt{\Omega}\,\dot{y}(s)\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial s})\, P_\infty(\xi,\ s).$$

$w(\sqrt{\varepsilon}\xi + y(s) - \varepsilon r,\ r)$, $w(\sqrt{\varepsilon}\xi + y(s),\ r)$を $y(s)$ のまわりに，$P_\infty(\xi - \sqrt{\varepsilon}\, r, s)$ をξ のまわりに展開して３次までとると，（例えば

$$w(y(s) + \sqrt{\varepsilon}\xi - \varepsilon r,\ r) = w(y(s),\ r) + w^{(1)}(y(s),\ r)$$

$$\times(\sqrt{\varepsilon}\xi - \varepsilon r) + \frac{1}{2} w^{(2)}(y(s),\ r)(\sqrt{\varepsilon}\xi - \varepsilon r)^2$$

$$+\frac{1}{6} w^{(3)}(y(s) + \theta\sqrt{\varepsilon}(\xi - \sqrt{\varepsilon}\, r),\ r)(\sqrt{\varepsilon}\xi - \varepsilon r)^3,$$

$$(0 \leq \theta \leq 1)$$

の如く。）(2)，(3) をつかって $|B-A|$は

$$\varepsilon^{\frac{m}{2}} \left| \int dr \int d\xi\ r^i\, w^{(j)}(y(s) + \eta\sqrt{\varepsilon}(\xi - \mu\sqrt{\varepsilon}\, r), r)\, \xi^k \frac{\partial^\ell}{\partial \xi^\ell} P_\infty(\xi - \sqrt{\varepsilon}\, r\nu,\ s)\right| \equiv |U|$$

$$0 \leq \eta, \mu, \nu \leq 1 \qquad 1 \leq m \qquad 0 \leq i \leq 6, \qquad 0 \leq j, k, \ell \leq 3$$

の有限和でおさえられる。ここで $w^{(j)}(y,\ r) = \partial^j w(y,\ r)/\partial y^j$.

仮定 (7)，(8) を使って

$$|U| \leq \varepsilon^{\frac{m}{2}} \int d\xi \int dr\, |r|^i\, g(r)\, \left|\xi^k \frac{\partial^\ell}{\partial \xi^\ell} P_\infty(\xi - \sqrt{\varepsilon}\, r\nu,\ s)\right|$$

$$\leq \varepsilon^{\frac{m'}{2}} \int dr \int d\xi\, |r|^{i'}\, |\xi|^{k'} g(r)\, P_\infty(\xi,\ s) \text{ の有限和}$$

$$0 \leq i' \leq 9 \qquad 0 \leq k' \leq 3, \qquad 1 \leq m'$$

したがって $\| QP_\infty(s) \|_1 \leq C' \varepsilon^{\frac{1}{2}} \to 0$。

次に (9) を示そう。すでに

$$\int d\xi\, \left| T(\sqrt{\Omega}(y(t) - y)\, e^{\Gamma_\Omega(y)t} \rho(\xi) - P_\infty(\xi,\ t)\right| \to 0 \quad (\Omega \to \infty)$$

を示した。これより

$$\| e^{\Gamma_\Omega(y)t}\rho - T(\sqrt{\Omega}(y-y(t))P_\infty(t)\|_1 \leq \| T(\sqrt{\Omega}(y-y(t))\|$$

$$\| T(\sqrt{\Omega}(y(t)-y)\, e^{\Gamma_\Omega(y)t}\rho - P_\infty(t)\|_1 \to 0$$

したがって

$$(9)\text{の左辺} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int d\xi\, f(\sqrt{\varepsilon}\xi + y)e^{\Gamma_\Omega(y)t}\rho(\xi)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int d\xi\, f(\sqrt{\varepsilon}\xi + y)\, T(\sqrt{\Omega}(y-y(t))P_\infty(\xi, t)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int d\xi\, f(\sqrt{\varepsilon}\xi + y(t))P_\infty(\xi, t).$$

$|f|<M$ だからルベーグの収束定理より積分と極限がひっくり返せて

$$= \int d\xi \lim_{\varepsilon\to 0} f(\sqrt{\varepsilon}\xi + y(t))P_\infty(\xi, t)$$

$$= \int d\xi\, P_\infty(\xi, t)\, f(y(t)) = f(y(t)) \qquad \text{Q. E. D.}$$

終わりに有益な議論をしてくださった岸本晶孝氏，中込照明氏，及びはげましをいただいた長谷川洋先生に感謝します。

文　　献

1)　L. van Hove, Physica **21**, (1955), 517; **23** (1957), 441.

2)　E. B. Davies, Comm. Math. Phys. **39** (1974), 91.
　　J. V. Pulè, Comm. Math. Phys. **38** (1974), 241.

3)　N. G. van Kampen, Can. J. Phys. **39** (1961), 551.

4)　R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. **9** (1973), 51.

5)　L. I. Schiff, Quantum Mechanics (McGraw-Hill) p. 17.

6)　マスロフ，摂動論と漸近的方法（岩波）大内他訳

7)　K. Hepp. Comm. Math. Phys. **35** (1974), 265.

8) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **55** (1976), 383.

9) K. Tomita and H. Tomita, Prog. Theor. Phys. **51** (1974), 1731.

10) K. Hepp, Lecture note given at the international school in Mathematical Physics, Camerio (1974).

11) M. O. Scully and W. E. Lamb jr. Phys. Rev. **159** (1967), 208.

12) H. Ito and T. Nakagomi, Progress 投稿中

13) M Suzuki, Prog. Theor. Phys. **55** (1976), 1064.

14) G. Lumer and R. S. Phillips, Pacific J. Math. **11** (1961), 679. 定理 2.1 と補題 3.2 の系